

Bayrhuber, Marianne; Leuders, Timo; Bruder, Regina; Wirtz, Markus  
**Repräsentationswechsel beim Umgang mit Funktionen – Identifikation von Kompetenzprofilen auf der Basis eines Kompetenzstrukturmodells. Projekt HEUREKO**

*Klieme, Eckhard [Hrsg.]; Leutner, Detlev [Hrsg.]; Kenk, Martina [Hrsg.]: Kompetenzmodellierung. Zwischenbilanz des DFG-Schwerpunktprogramms und Perspektiven des Forschungsansatzes. Weinheim ; Basel : Beltz 2010, S. 28-39. - (Zeitschrift für Pädagogik, Beiheft; 56)*



Quellenangabe/ Reference:

Bayrhuber, Marianne; Leuders, Timo; Bruder, Regina; Wirtz, Markus: Repräsentationswechsel beim Umgang mit Funktionen – Identifikation von Kompetenzprofilen auf der Basis eines Kompetenzstrukturmodells. Projekt HEUREKO - In: Klieme, Eckhard [Hrsg.]; Leutner, Detlev [Hrsg.]; Kenk, Martina [Hrsg.]: Kompetenzmodellierung. Zwischenbilanz des DFG-Schwerpunktprogramms und Perspektiven des Forschungsansatzes. Weinheim ; Basel : Beltz 2010, S. 28-39 - URN: urn:nbn:de:0111-opus-33450 - DOI: 10.25656/01:3345

<https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0111-opus-33450>

<https://doi.org/10.25656/01:3345>

in Kooperation mit / in cooperation with:

**BELTZ**

<http://www.beltz.de>

**Nutzungsbedingungen**

Gewährt wird ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht-kommerziellen Gebrauch bestimmt. Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen: Auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments müssen alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten werden. Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgendeiner Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen.  
Mit der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

**Terms of use**

We grant a non-exclusive, non-transferable, individual and limited right to using this document.  
This document is solely intended for your personal, non-commercial use. Use of this document does not include any transfer of property rights and it is conditional to the following limitations: All of the copies of this documents must retain all copyright information and other information regarding legal protection. You are not allowed to alter this document in any way, to copy it for public or commercial purposes, to exhibit the document in public, to perform, distribute or otherwise use the document in public.

By using this particular document, you accept the above-stated conditions of use.

**Kontakt / Contact:**

peDOCS  
DIPF | Leibniz-Institut für Bildungsforschung und Bildungsinformation  
Informationszentrum (IZ) Bildung  
E-Mail: [pedocs@dipf.de](mailto:pedocs@dipf.de)  
Internet: [www.pedocs.de](http://www.pedocs.de)

Zeitschrift für Pädagogik · 56. Beiheft

# **Kompetenzmodellierung**

## **Zwischenbilanz des DFG- Schwerpunktprogramms und Perspektiven des Forschungsansatzes**

Herausgegeben von

Eckhard Klieme, Detlev Leutner und Martina Kenk

**BELTZ**

Die in der Zeitschrift veröffentlichten Beiträge sind urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Kein Teil dieser Zeitschrift darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form – durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren – reproduziert oder in eine von Maschinen, insbesondere Datenverarbeitungsanlagen, verwendbare Sprache übertragen werden. Auch die Rechte der Wiedergabe durch Vortrag, Funk- und Fernsehsendung, im Magnettonverfahren oder auf ähnlichem Wege bleiben vorbehalten. Fotokopien für den persönlichen oder sonstigen eigenen Gebrauch dürfen nur von einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus als Einzelkopie hergestellt werden. Jede im Bereich eines gewerblichen Unternehmens hergestellte oder genutzte Kopie dient gewerblichen Zwecken gem. § 5 4(2) UrhG und verpflichtet zur Gebührenzahlung an die VG Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestr. 49, 80336 München, bei der die einzelnen Zahlungsmodalitäten zu erfragen sind.

© 2010 Beltz Verlag · Weinheim und Basel

Herstellung: Lore Amann

Gesamtherstellung: Druckhaus „Thomas Müntzer“, Bad Langensalza

Printed in Germany

ISSN 0514-2717

Bestell-Nr. 41157

# Inhaltsverzeichnis

*Eckhard Klieme/Detlev Leutner/Martina Kenk*

Kompetenzmodellierung. Eine aktuelle Zwischenbilanz des DFG-Schwerpunktprogramms. Einleitung zum Beiheft .....	9
--	---

*Benő Csapó*

Goals of Learning and the Organization of Knowledge .....	12
---	----

## Mathematische Kompetenzen

*Marianne Bayrhuber/Timo Leuders/Regina Bruder/Markus Wirtz*

Projekt HEUREKO

Repräsentationswechsel beim Umgang mit Funktionen – Identifikation von Kompetenzprofilen auf der Basis eines Kompetenzstrukturmodells .....	28
---	----

*Andreas Frey/Nicki-Nils Seitz*

Projekt MAT

Multidimensionale adaptive Kompetenzdiagnostik: Ergebnisse zur Messeffizienz .....	40
--	----

*Nina Zeuch/Hanneke Geerlings/Heinz Holling/Wim J. van der Linden/*

*Jonas P. Bertling*

Projekt Regelgeleitete Itementwicklung

Regelgeleitete Konstruktion von statistischen Textaufgaben: Anwendung von linear logistischen Testmodellen und Aufgabencloning .....	52
--	----

*Eckhard Klieme/Anika Bürgermeister/Birgit Harks/Werner Blum/Dominik Leiß/*

*Katrin Rakoczy*

Projekt Co<sup>2</sup>CA

Leistungsbeurteilung und Kompetenzmodellierung im Mathematikunterricht .....	64
--	----

*Olga Kunina-Habenicht/Oliver Wilhelm/Franziska Matthes/André A. Rupp*

Projekt Kognitive Diagnosemodelle

Kognitive Diagnosemodelle: Theoretisches Potential und methodische Probleme ...	75
---	----

*Aiso Heinze*

Review

Mathematische Kompetenz modellieren und diagnostizieren: Eine Diskussion der Forschungsprojekte des DFG-Schwerpunktprogramms „Kompetenzmodelle“ aus mathematikdidaktischer Sicht .....	86
--	----

## Naturwissenschaftliche Kompetenzen

*Tobias Viering/Hans E. Fischer/Knut Neumann*

Projekt Physikalische Kompetenz

Die Entwicklung physikalischer Kompetenz in der Sekundarstufe I .....	92
---	----

*Renate Soellner/Stefan Huber/Norbert Lenartz/Georg Rudinger*

Projekt Gesundheitskompetenz

Facetten der Gesundheitskompetenz – eine Expertenbefragung .....	104
--	-----

*Ilonca Hardy/Thilo Kleickmann/Susanne Koerber/Daniela Mayer/*

*Kornelia Möller/Judith Pollmeier/Knut Schwippert/Beate Sodian*

Projekt Science – P

Die Modellierung naturwissenschaftlicher Kompetenz im Grundschulalter .....	115
---	-----

*Nina Roczen/Florian G. Kaiser/Franz X. Bogner*

Projekt Umweltkompetenz

Umweltkompetenz – Modellierung, Entwicklung und Förderung .....	126
---	-----

*Ilka Parchmann*

Review

Kompetenzmodellierung in den Naturwissenschaften – Vielfalt ist wertvoll, aber nicht ohne ein gemeinsames Fundament .....	135
---	-----

## Sprachliche und Lesekompetenzen

*Wolfgang Schnotz/Nele McElvany/Holger Horz/Sascha Schroeder/Mark Ullrich/*

*Jürgen Baumert/Axinja Hachfeld/Tobias Richter*

Projekt BITE

Das BITE-Projekt: Integrative Verarbeitung von Bildern und Texten in der Sekundarstufe I .....	143
--	-----

*Tobias Dörfler/Stefanie Golke/Cordula Artelt*

Projekt Dynamisches Testen

Dynamisches Testen der Lesekompetenz: Theoretische Grundlagen, Konzeption und Testentwicklung .....	154
---	-----

*Thorsten Roick/Petra Stanat/Oliver Dickhäuser/Volker Frederking/  
Christel Meier/Lydia Steinhauer*

Projekt Literarästhetische Urteilskompetenz

Strukturelle und kriteriale Validität der literarästhetischen Urteilskompetenz ..... 165

*Hans Anand Pant/Simon P. Tiffin-Richards/Olaf Köller*

Projekt Standard-Setting

Standard-Setting für Kompetenztests im Large-Scale-Assessment ..... 175

*Johannes Hartig/Jana Höhler*

Projekt MIRT

Modellierung von Kompetenzen mit mehrdimensionalen IRT-Modellen ..... 189

*Albert Bremerich-Vos*

Review

Modellierung von Aspekten sprachlich-kultureller Kompetenz. Anmerkungen

zu den Projektberichten ..... 199

## **Fächerübergreifende Kompetenzen**

*Ellen Gausmann/Sabina Eggert/Marcus Hasselhorn/Rainer Watermann/  
Susanne Bögeholz*

Projekt Bewertungskompetenz

Wie verarbeiten Schüler/-innen Sachinformationen in Problem- und

Entscheidungssituationen Nachhaltiger Entwicklung – Ein Beitrag zur

Bewertungskompetenz ..... 204

*Samuel Greiff/Joachim Funke*

Projekt Dynamisches Problemlösen

Systematische Erforschung komplexer Problemlösefähigkeit anhand minimal

komplexer Systeme ..... 216

*Klaus Lingel/Nora Neuenhaus/Cordula Artelt/Wolfgang Schneider*

Projekt EWIKO

Metakognitives Wissen in der Sekundarstufe: Konstruktion und Evaluation

domänenspezifischer Messverfahren ..... 228

*Jens Fleischer/Joachim Wirth/Stefan Rumann/Detlev Leutner*

Projekt Problemlösen

Strukturen fächerübergreifender und fachlicher Problemlösekompetenz –

Analyse von Aufgabenprofilen ..... 239

*Melanie Schütte/Joachim Wirth/Detlev Leutner*

Projekt Selbstregulationskompetenz

Selbstregulationskompetenz beim Lernen aus Sachtexten – Entwicklung und  
Evaluation eines Kompetenzstrukturmodells ..... 249

*Tobias Gschwendtner/Bernd Geißel/Reinhold Nickolaus*

Projekt Berufspädagogik

Modellierung beruflicher Fachkompetenz in der gewerblich-technischen  
Grundbildung ..... 258

*Franziska Perels*

Review

Modellierung und Messung fächerübergreifender Kompetenzen und ihre  
Bedeutung für die Bildungsforschung. Kritische Reflexion der Projektbeiträge ... 270

## **Lehrerkompetenzen**

*Simone Bruder/Julia Klug/Silke Hertel/Bernhard Schmitz*

Projekt Beratungskompetenz

Modellierung der Beratungskompetenz von Lehrkräften ..... 274

*Cornelia Gräsel/Sabine Krolak-Schwerdt/Ines Nölle/Thomas Hörstermann*

Projekt Diagnostische Kompetenz

Diagnostische Kompetenz von Grundschullehrkräften bei der Erstellung der  
Übergangsempfehlung: eine Analyse aus der Perspektive der sozialen  
Urteilsbildung ..... 286

*Tina Seidel/Geraldine Blomberg/Kathleen Stürmer*

Projekt OBSERVE

„OBSERVER“ – Validierung eines videobasierten Instruments zur Erfassung  
der professionellen Wahrnehmung von Unterricht ..... 296

*Mareike Kunter*

Review

Modellierung von Lehrerkompetenzen. Kommentierung der  
Projektdarstellungen ..... 307

Marianne Bayrhuber/Timo Leuders/Regina Bruder/Markus Wirtz

## Repräsentationswechsel beim Umgang mit Funktionen – Identifikation von Kompetenzprofilen auf der Basis eines Kompetenzstrukturmodells

Projekt HEUREKO<sup>1</sup>

### 1. Theoretischer Hintergrund

Ziel des Projektes HEUREKO ist die Konstruktion und Überprüfung eines Kompetenzstrukturmodells in dem für den Mathematikunterricht zentralen Bereich der Leitidee „Wachstum und Veränderung“. Auf der Basis dieses Modells sollen typische Kompetenzprofile von Schülerinnen und Schülern beim Arbeiten mit mathematischen Funktionen und ihren Repräsentationsformen identifiziert werden.

Mathematische Repräsentationsformen sowie der Wechsel zwischen ihnen spielen in der mathematikdidaktischen Forschung eine zentrale Rolle (vgl. z.B. Swan 1985; Goldin 1998; Ainsworth/Bibby/Wood 2002). Im mathematischen Inhaltsbereich „Wachstum und Veränderung“ sind Tabelle, Graf, Term und Situation (verbale Beschreibung oder bildliche Darstellung eines Sachverhalts) als typische externe Repräsentationsformen von Funktionen zentrale Konzepte (vgl. Malle 2000). Trotz der hohen Relevanz innerhalb der Mathematikdidaktik, steht eine systematische empirische Untersuchung des Wechsels zwischen „Tabelle“ bzw. „Term“ und anderen externen Repräsentationsformen von Funktionen noch weitgehend aus.

Empirische Untersuchungen zum Multimedia-Lernen zeigen, dass unterschiedliche Repräsentationsformen mathematischer Zusammenhänge und der Wechsel zwischen diesen entscheidend für individuelle Lernprozesse sind. Damit sich ein positiver Lerneffekt einstellt, müssen die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein, zwischen den vorliegenden Repräsentationen zu wechseln, die verbindenden Elemente zu identifizieren und zu verknüpfen (vgl. Ainsworth/Bibby/Wood 2002; Seufert 2003). Während des Erlernens dieser Grundfertigkeiten zeigen sich typische Fehler (vgl. Bodemer u.a. 2004).

---

1 Diese Veröffentlichung wurde ermöglicht durch eine Sachbeihilfe der Deutschen Forschungsgemeinschaft (Kennzeichen: FR 2552/2-1, FR 2552/2-2 und WI 3210/2-1) im Schwerpunktprogramm „Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen“ (SPP 1293).



Kozma und Russell (1997) berichten, dass Novizinnen und Novizen beispielsweise verschiedene Repräsentationen nur über deren Oberflächenmerkmale aufeinander beziehen, Expertinnen und Experten hingegen stellen Bezüge über dahinterliegende Konzepte her.

Eine Möglichkeit der Beschreibung der kognitiven Prozesse bei der Entnahme von Informationen aus Texten und Grafen wird im Modell zur integrativen Bild- und Textverarbeitung (vgl. Schnotz 2005) beschrieben. Hier werden drei hierarchische Verarbeitungsstufen der Bild-Text-Integration unterschieden: (a) Es werden Beziehungen zwischen Bild- und Textelementen hergestellt, Detailinformationen aus Bild und Text werden miteinander verknüpft. (b) Verknüpfung von einfachen semantischen Relationen zwischen Text und Bild: diese werden auf die jeweils andere Repräsentationsform bezogen. (c) Das Individuum verknüpft komplexe semantische Relationsgefüge zwischen Text und Bild. Solche Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern hinsichtlich der Kombination von Graf bzw. Tabelle und Text sind z.B. für das Problemlösen mit Funktionen im Mathematikunterricht von Bedeutung. Unterschiedliche Schülerprofile beim Umgang mit Funktionen können auf verschiedene Verarbeitungstypen und -niveaus bei der Integration von Bild und Text zurückgeführt werden.

Eine Studie von Pesonen, Ehmke und Haapasalo (2005) hat gezeigt, dass beim Umgang mit verschiedenen Repräsentationsformen unterschiedliche Typen von Lernenden vorliegen. Anhand einer latenten Klassenanalyse ließen sich drei qualitativ verschiedene Verständnisstufen vom mathematischen Begriff der binären Operation (Rechenoperation) nachweisen. Studierende auf der höchsten Stufe können inhaltsgleiche Darstellungen zuordnen, binäre Operationen in verschiedenen Repräsentationsformen identifizieren, sowie symbolische, verbale oder grafische Beispiele produzieren. Auf der mittleren Verständnisstufe können Personen zwischen verschiedenen Repräsentationsformen wechseln, weisen aber Defizite in der Identifikationsphase auf. Studierende auf der untersten Verständnisstufe erreichen in allen drei untersuchten Phasen die geringsten Werte.

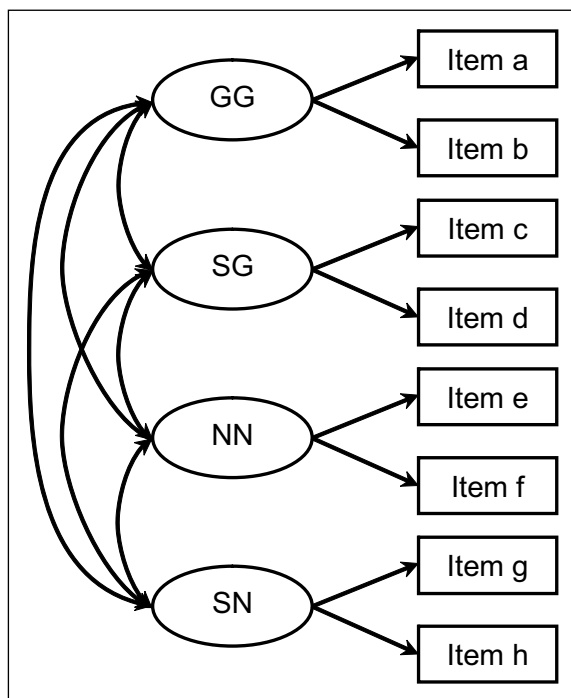
Ob und inwiefern bestimmte Kompetenzprofile mit kognitiven Leistungsaspekten zusammenhängen, wurde unseres Wissens bisher noch nicht untersucht. Allerdings zeigen Befunde zur Präferenz von medial präsentierten Lernumgebungen, dass schwächere Schülerinnen und Schüler von grafischer Repräsentation einer Aufgabe profitieren (vgl. Snow/Yalow 1982).

Ausgehend von dieser Literaturlage erscheint es plausibel, von differenzierten Kompetenzprofilen beim Umgang mit mathematischen Repräsentationsformen auszugehen. Als Grundlage für die vorliegende Untersuchung diente das Kompetenzstrukturmodell, das im Projekt HEUREKO entwickelt wurde (vgl. Bayrhuber u.a., in Vorb.). Die Repräsentationsformen „Tabelle“, „Graf“ und „Situation“ bildeten dabei die Basis für mögliche Dimensionen dieses Modells.

Unter einer Situation verstehen wir dabei die verbale oder ikonische Darstellung einer Realsituation, die noch keine mathematischen Symbole oder Strukturen verwendet. Die Kompetenz im Umgang mit der Repräsentationsform „Term“ wird erst mit Beginn der Klassenstufe 8 aufgebaut und wurde deshalb in der ersten Phase des Projekts, die sich auf die Klassen 7 und 8 konzentriert, nicht berücksichtigt.

Das Modell postuliert, dass die Kompetenz des Problemlösens mit funktionalen Repräsentationen durch die Fähigkeit der Übersetzung zwischen grafischer bzw. numerischer Darstellung und Situation sowie die Verarbeitung innerhalb der numerischen oder grafischen Repräsentationen bestimmt wird:

1. Dimension: Mathematisieren innerhalb der *grafischen* Darstellung (GG): Verarbeiten grafischer Daten ohne Situationsbezug, z.B. Ablesen einzelner Werte aus einem Funktionsgraphen.
2. Dimension: Wechsel zwischen *situativer* und *grafischer* Repräsentation (SG): Herstellen von Beziehungen zwischen Textelementen und grafischen Daten, meist vorliegend als Funktionsgraphen.
3. Dimension: Mathematisieren innerhalb der *numerischen* Darstellung (NN): Verarbeitung numerischer Daten ohne Situationsbezug.
4. Dimension: Wechsel zwischen *situativer* und *numerischer* Repräsentation (SN): Verknüpfung von Textelementen und numerischen Daten, meist vorliegend in Tabellenform.



Anmerkung: GG = grafisch-grafisch, SG = situativ-grafisch  
 NN = numerisch-numerisch, SN = situativ-numerisch

Abb. 1: Schematische Darstellung des Kompetenzstrukturmodells

Ziel der vorliegenden Studie ist es, auf Grundlage des beschriebenen Modells Kompetenzprofile von Schülerinnen und Schülern der 7. und 8. Klasse abzuleiten und den Zusammenhang dieser Profile mit der Fähigkeit im figuralen Denken – als einem zentralen Aspekt der kognitiven Leistungsfähigkeit – zu untersuchen. Man versteht darunter die Fähigkeit, figural-räumlich präsentierte Probleme zu lösen (vgl. Heller/Perleth 2000).

## 2. Methode

### 2.1 Konstruktion und Überprüfung eines mehrdimensionalen Kompetenzstrukturmodells

Ausgangspunkt der Konstruktion des Kompetenzstrukturmodells war die Identifikation der relevanten Dimensionen auf der Basis bestehender didaktischer Theorien und empirischer Befunde, wie sie in Abschnitt 1 beschrieben wurden. Zur Absicherung des theoretischen Konstrukts und der Vollständigkeit hinsichtlich didaktisch relevanter Aspekte wurden Interviews mit Expertinnen und Experten aus der Fachdidaktik geführt. Das Modell, das als Basis für die Itemkonstruktion diente, wurde als vollständig und relevant für den Inhaltsbereich eingeschätzt.

Die Items zur Operationalisierung der Dimensionen des Modells wurden auf Basis von Schulbuchaufgaben entwickelt, um eine möglichst hohe curriculare Validität zu gewährleisten. Zusätzlich wurden in Einzel- und Gruppeninterviews mit Schülerinnen und Schülern (N = 27) Informationen zur Optimierung des Itempools gewonnen.

Für die endgültige Datenerhebung standen insgesamt 80 Items zur Verfügung, von denen alle Schülerinnen und Schüler je 34 Items zur Bearbeitung vorgelegt wurden (Testheft-Design s. Tabelle 1).

Heft 1	Heft 2	Heft 3	Heft 4	Heft 5	Heft 6	Heft 7
2	3	4	5	6	7	1
1	2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	1	2

Jedes Item wurde im Mittel von 372 Schülerinnen und Schülern bearbeitet (Bereich = 348–392; SD = 12,06).

Tab.1: Testheft-Design

Die Stichprobe umfasste 37 Gymnasialklassen, 20 (54,1%) Klassen stammten aus Baden-Württemberg und 17 (45,9%) Klassen kamen aus Hessen. 17 (45,9%) Klassen gehörten der siebten Klassenstufe an und 20 (54,1%) Klassen der achten Klassenstufe. Insgesamt nahmen 872 Schülerinnen und Schüler an der Studie teil, die Stichprobe setzte sich aus 471 (54,0%) Mädchen und 399 (46,0%) Jungen zusammen (2 fehlende Angaben). Es wurden ausschließlich Klassen aus Gymnasien berücksichtigt, um die

Schülerpopulation möglichst homogen hinsichtlich sprachlicher Fähigkeiten und schulformtypischer Bildungsanforderungen zu halten.

Das in Abschnitt 1 beschriebene vierdimensionale Kompetenzmodell hat sich auf Basis des informationstheoretischen Indizes „consistent akaike information criterion (CAIC) im Vergleich mit theoretisch plausiblen Alternativmodellen<sup>2</sup> als das am besten passende Modell herausgestellt (vgl. Bayrhuber u.a., in Vorb.). Zur Analyse der Modelle wurde das Multidimensional Random Coefficients Multinomial Logit Model (vgl. Adams/Wilson/Wang 1997) zugrunde gelegt. Dieses ist bereits in mehreren großen Schulleistungsstudien wie TIMSS und PISA zur Modellierung von Schülerkompetenzen zur Anwendung gekommen und ist in der Software ConQuest implementiert (vgl. Wu/Adams/Wilson 2001).

In Tabelle 2 sind die Reliabilitäten der einzelnen Dimensionen sowie die latenten Korrelationen zwischen den vier Dimensionen des Modells aufgeführt. Es wurde die EAP/PV-Reliabilität eingesetzt, die im Rahmen der Rasch-Analyse bestimmt wurde und mit Cronbachs Alpha vergleichbar ist (vgl. Rost 2004).

	SN	NN	GG	SG
SN	0.64			
NN	0.65	0.62		
GG	0.70	0.57	0.52	
SG	0.76	0.71	0.64	0.72

Anmerkung: Die Reliabilitätskoeffizienten sind in der Diagonale aufgeführt.

SN = situativ-numerisch, NN = numerisch-numerisch, GG = grafisch-grafisch, SG = situativ-grafisch.

Tab. 2: Latente Korrelationen und Reliabilität der Dimensionen des vierdimensionalen Modells

## 2.2 Statistische Analyseverfahren

### Latente Klassenanalyse

Als geeignetes Verfahren zur Analyse von Kompetenzprofilen wurde eine latente Klassenanalyse (LCA) durchgeführt. Der LCA liegt ein psychometrisches Modell aus der probabilistischen Testtheorie zugrunde: Es wird angenommen, dass die Zugehörigkeit einer Schülerin oder eines Schülers zu einer latenten, qualitativen Merkmalsklasse ausreichend ist, um deren oder dessen manifeste Merkmalsausprägungen bis auf eine stochastische Komponente vorherzusagen. Das Modell postuliert, dass jede/r Schüler/in einer Klasse angehört, die sich durch ein spezifisches Fähigkeitsprofil auf den Modell-

2 Alternativ wurden ein eindimensionales Modell und ein zweidimensionales Modell, das zwischen numerischer und grafischer Repräsentation differenziert, getestet.

dimensionen auszeichnet. Für jede Klasse werden klassenspezifische Erwartungswerte auf den vier Analyseskalen angenommen. Ein solches Modell hat im Rahmen einer Kompetenzdiagnostik den Vorteil, dass Personen nach Fähigkeitsprofilen unterschieden werden können. Die Feststellung individueller Stärken oder Schwächen ist dann geeigneter Ausgangspunkt einer Fördermaßnahme (vgl. Hartig 2007).

Die LCA wurde mit der Software Latent Gold 4.5 durchgeführt. In einem iterativen Verfahren wurde dabei für post hoc vorgegebene Klassenzahlen nach dem Maximum-Likelihood-Prinzip die optimale Lösung erstellt. Die Entscheidung bei der Auswahl des Lösungsmodells wird anhand des CAIC getroffen (vgl. Vermunt 2004). Die durch die Erhebung in Schulklassen bedingte Mehrebenenstruktur wurde durch den in Latent Gold 4.5 (GClasses, vgl. Vermunt 2008) Expectation-Maximization-Algorithmus berücksichtigt.

### *2.3 Zusammenhang von Kompetenzprofilen und übergreifenden Leistungsaspekten*

Um erste Hinweise auf Erklärungen für Fähigkeitsprofile zu erhalten, wurde das figurale Denken als Kovariate ausgewertet. Es wird vermutet, dass eine hohe Kompetenz im figuralen Denken mit einer hohen Leistung bei den grafisch repräsentierten Aufgaben einhergeht.

Das figurale Denken wurde mit dem Untertest „Figurenanalogien“ (N2) aus dem Kognitiven Fähigkeitstest (KFT 4–12 + R; vgl. Heller/Perleth 2000) erhoben und ist in T-Werten ( $M = 50$ ,  $s = 10$ ) angegeben. Die Subskala N 2 besteht aus 25 figuralen Items, auf deren Basis ein Fähigkeitswert bestimmt wurde (Cronbachs Alpha = 0,80). Um zu überprüfen, ob sich die identifizierten Cluster von Schülerinnen und Schülern mit bestimmten Kompetenzprofilen in der Ausprägung des figuralen Denkens unterscheiden, wurde eine univariate Varianzanalyse (ANOVA) durchgeführt.

## **3. Ergebnisse**

### *3.1 Analyse von Kompetenzprofilen*

Zur Überprüfung, ob es Schülerinnen und Schüler gibt, die bezüglich der postulierten vier Dimensionen unterschiedliche Fähigkeitsmuster aufweisen, wurde eine latente Klassenanalyse (LCA) unter Berücksichtigung der Mehrebenenstruktur durchgeführt.

In der 7. Klassenstufe ließen sich keine typischen Profile von Schülerinnen und Schülern nachweisen, welche unterschiedliche Stärken und Schwächen in den verschiedenen Dimensionen des Wechsels von Darstellungsart und Repräsentationsform aufweisen. In der 8. Klasse hingegen erweist sich eine Modellierung mit Fähigkeitsklassen als empirisch tragfähig, da sich eine bedeutsame Interaktion von Clusterzugehörigkeit und Ausprägungen auf den Merkmalsdimensionen zeigt (s. Tabelle 3). Das 6-Cluster-

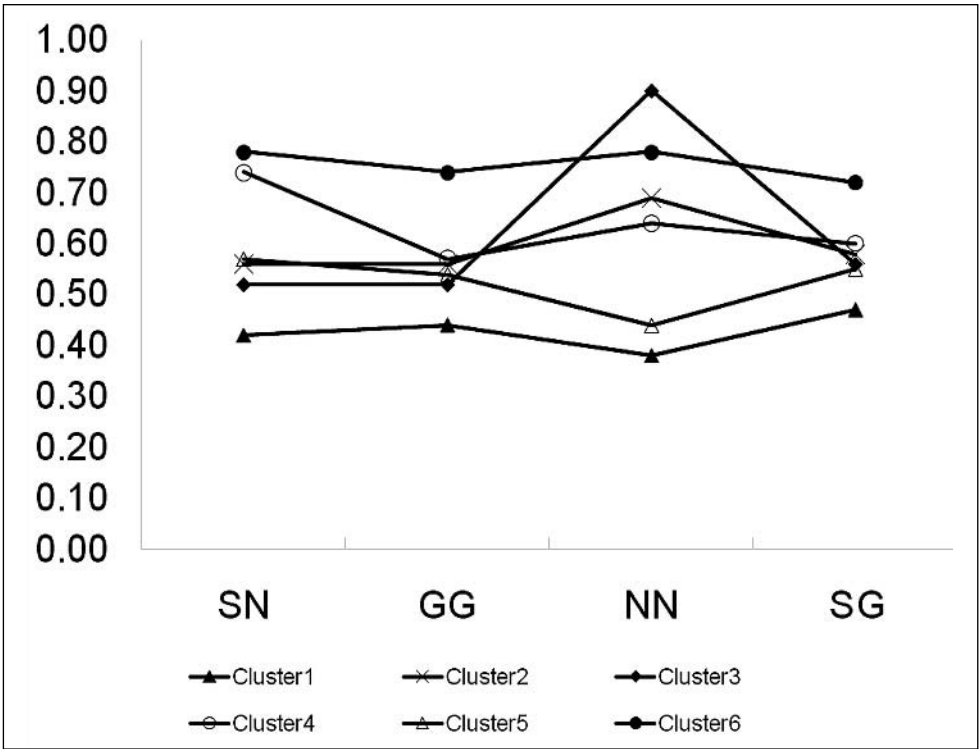
Modell	LL	CAIC	BIC	Class. Err.
1 Cluster	-3037.31	6131	6123	0.0000
2 Cluster	-2949.89	6021	6004	0.1418
3 Cluster	-2896.31	5978	5952	0.1622
4 Cluster	-2862.49	5975	5940	0.1828
5 Cluster	-2840.95	5996	5952	0.2138
6 Cluster	-2772.91	5924	5871	0.1189
7 Cluster	-2758.66	5960	5898	0.2083

Anmerkung: LL=Likelihood; CAIC= Consistent Akaike Information Criterion;  
BIC= Baysian Information Criterion; Class. Err.= Fehlklassifikationsrate

Tab. 3: Latente Klassenanalyse

Modell weist den geringsten CAIC auf. Auch die im Vergleich zu den übrigen Modellen niedrige Fehlklassifikationsrate weist dieses Modell als optimal aus.

Hier zeigen sich typische Schülerprofile, die grafische Darstellung der Ergebnisse für die 8. Klasse findet sich in der folgenden Abbildung 2.



Anmerkung: SN = situativ-numerisch, GG = grafisch-grafisch,  
NN = numerisch-numerisch, SG = situativ-grafisch

Abb. 2: Kompetenzprofile in der 8. Klassenstufe

Die Cluster 1 (29% der untersuchten Achtklässler/innen) und 6 (6%) unterscheiden sich lediglich hinsichtlich des Grundniveaus über alle Dimensionen hinweg in ähnlicher Weise. Hier bildet sich also ein generell unterschiedliches Fähigkeitsniveau in allen vier Dimensionen in ähnlicher Weise ab. Für die übrigen Cluster zeigen sich jedoch auffällige typologische Strukturen, die unterschiedliche diagnostisch relevante Kompetenzstrukturen widerspiegeln. So repräsentiert beispielsweise Cluster 4 (15%) Schülerinnen und Schüler, die bei ansonsten eher durchschnittlicher Leistung über eine hohe Kompetenz beim Repräsentationswechsel von der Situation ins Numerische (SN) sowie bei der Verarbeitung innerhalb der numerischen Repräsentation (NN) verfügen. Cluster 3 (15%) hingegen ist gekennzeichnet durch eine markante Stärke im Bereich der numerischen Verarbeitung (NN) bei sonst durchschnittlichen Leistungen. Schülerinnen und Schüler, die dem Cluster 5 (11%) angehören, zeigen einen ähnlichen Profilverlauf, jedoch ist die Fähigkeit zur Verarbeitung innerhalb der numerischen Repräsentation nicht so hoch ausgeprägt wie in Cluster 3. Cluster 2 (21%) ist gekennzeichnet durch eine relative Schwäche innerhalb der numerischen Verarbeitung. Es wird zu prüfen sein, ob diese Profile sich als stabil gegenüber der Wahl anderer Populationen oder gegenüber zeitlichen Entwicklungen erweisen.

### 3.2 Zusammenhang von Kompetenzprofilen und kognitiver Leistungsfähigkeit

Zum besseren Verständnis dieser Kompetenzprofile wurde der Zusammenhang zwischen der Clusterzugehörigkeit und der Fähigkeit im figuralen Denken analysiert. Es zeigte sich, dass sich die verschiedenen Cluster signifikant ( $F_{5,385} = 7,75$ ;  $p < 0,001$ ) und mit hoher Effektstärke ( $\eta^2 = 0,09$ ) in ihren Mittelwerten im Untertest N2 im KFT 4–12 + R unterscheiden. Cluster 1 ( $T = 52,1$ ) und Cluster 3 ( $T = 51,8$ ) weisen beide vergleichsweise niedrige Werte figuralen Denkens auf (vgl. Tabelle 4), Cluster 3 ist jedoch durch eine hohe Kompetenz im Lösen von numerischen Aufgaben gekennzeichnet. Bei den grafischen Aufgaben und bei Aufgaben, die einen Repräsentationswechsel von der Situation ins Numerische verlangen, zeigen sich in diesem Cluster Schwächen. Der höchste Mittelwert im figuralen Denken zeigt sich in Cluster 6 ( $T = 60,7$ ), dieser überdurchschnittliche Wert spiegelt sich ebenfalls in den hohen Kompetenzen in den verschiedenen Dimensionen des Mathematiktests wieder. Obwohl Cluster 4 relative Schwächen beim Bearbeiten von grafischen Aufgaben hat, ist der Wert im figuralen Denken ( $T = 57,8$ ) relativ hoch ausgeprägt.

Cluster	Mittelwert	Standardabweichung	N
1	52,1	7,6	90
2	56,8	9,1	108
3	51,8	9,2	64
4	57,8	6,3	73
5	57,2	9,6	40
6	60,7	5,0	10

Anmerkung: Die Mittelwerte sind in T-Werten angegeben

Tab. 4: Mittelwert der Cluster im Untertest N2 aus dem KFT 4–12 + R

Diese Befunde hinsichtlich des Zusammenhangs von Clusterzugehörigkeit und figuralen Denken geben erste Hinweise auf den Einfluss von Moderatorvariablen auf unterschiedliche Kompetenzprofile von Schülerinnen und Schülern.

## 4. Diskussion und Ausblick

### 4.1 Kompetenzprofile

Unsere Ergebnisse zeigen, dass der Repräsentationstyp für den mathematischen Inhaltsbereich „funktionale Veränderung“ bedeutsam für die Kompetenzstruktur ist.

Auf der Basis eines vierdimensionalen Kompetenzstrukturmodells konnten in der 8. Klassenstufe Kompetenzprofile ermittelt werden, welche die grafische und numerische Modellierung von Situationen bzw. den Wechsel zwischen diesen Repräsentationen beinhalten. Es konnten Cluster von Schülerinnen und Schülern identifiziert werden, die typische Kompetenzprofile aufweisen. So zeigt beispielsweise eine Gruppe eine hohe Kompetenz beim Repräsentationswechsel von der situativen Darstellung in die numerische Repräsentation sowie innerhalb der numerischen Darstellung, während die Leistungen bei grafischen Aufgaben eher durchschnittlich sind. Bei einer anderen Gruppe mit einem niedrigen Wert im figuralen Denken wurde eine markante Stärke in der numerischen Verarbeitung festgestellt, jedoch Schwächen bei der Bearbeitung von grafischen Aufgaben.

Die Ergebnisse zum Zusammenhang zwischen den Kompetenzprofilen und figuralen Denken sind inkonsistent. Die Erwartung, dass hohe Kompetenzen bei der Bearbeitung von Aufgaben mit grafischem Inhalt mit einer hohen Leistung im figuralen Denken einhergehen, konnte nicht bestätigt werden. Möglicherweise sind die Befunde durch unterschiedliche Kompetenzniveaus der Schülerinnen und Schüler in der Bild-Text-Integration (vgl. Schnotz 2005) zu erklären.

Die Ergebnisse von Snow und Yalow (1982) hinsichtlich der Präferenz schwächerer Schülerinnen und Schüler von grafischen Aufgaben konnten nicht auf den Inhaltsbereich „funktionale Veränderung“ übertragen werden. Schwächere Schülerinnen und Schüler weisen keine Stärken bei grafisch repräsentierten Aufgaben auf.

In der 7. Klasse konnten – entgegen unserer Annahme – keine typischen Profile von Schülerinnen und Schülern identifiziert werden, welche unterschiedliche Stärken und Schwächen hinsichtlich des Wechsels von Darstellungsart und Repräsentationsform aufweisen. Diese Schülerinnen und Schüler unterscheiden sich lediglich im Niveau ihrer Lösungshäufigkeit in den untersuchten Dimensionen.

Diese Befunde sind den Ergebnissen von Kleine (2005) ähnlich, der parallele Profilverläufe dargestellt hat. Möglicherweise handelt es sich hier um eine Polytomisierung eines eigentlich kontinuierlichen Fähigkeitsspektrums. Allerdings könnte dies auch darauf zurückzuführen sein, dass die Schülerinnen und Schüler noch am Anfang des Kompetenzerwerbs in diesem Bereich stehen und ihre Fähigkeiten noch nicht in dem Maß ausdifferenziert sind wie in der 8. Klasse. Es kann aber auch als Indiz für eine relative Homogenität des Curriculums zum Einstieg in diesen Bereich gewertet werden.



## 4.2 Grenzen der vorliegenden Studie und Ausblick

Die Analyse der Binnenstruktur des Kompetenzmodells zeigt noch unbefriedigende Reliabilitäten für drei der vier Dimensionen. Es besteht für diese durch eine zu geringe Anzahl von Items repräsentierten Konstrukte der Bedarf nach zusätzlichen und konstruktvalideren Items, um die psychometrischen Eigenschaften der Skalen zu optimieren. Auch für die Skala „situativ-grafisch“ (SG) mit akzeptabler Reliabilität müssen die Items in Bezug auf fokussiertere Iteminhalte optimiert werden, um deren Trennschärfe sowie die Skalengültigkeit und -reliabilität zu erhöhen.

Die identifizierten vier Dimensionen werden noch weiteren Strukturanalysen unterzogen, insbesondere wird eine Stufung der Ausprägungen auf den Dimensionen in Kompetenzniveaus angestrebt (vgl. Hartig 2007). Dadurch wird es möglich, zwischen Personen mit unterschiedlichen Teilkompetenzniveaus und Teilkompetenzprofilen zu unterscheiden und perspektivisch Kompetenzentwicklungen abzubilden.

Es haben sich noch nicht genügend Hinweise zu grundsätzlichen Zusammenhängen von spezifischen Kompetenzprofilen beim Repräsentationswechsel und einzelnen Moderatorvariablen ergeben. Die vorliegende Studie ist explorativ angelegt, sodass weitere diagnostisch relevante Zusammenhänge insbesondere unter Einbeziehung zusätzlicher Moderatorvariablen geprüft werden müssen. Dies sollen z.B. verbale Fähigkeiten (vgl. Heller/Perleth 2000) zur Überprüfung der Bedeutung des Aufgabenkontexts („Situation“) und weitere grafisch-räumliche Fähigkeiten sein (vgl. Jäger/Süß/Beauducel 1997).

Ob sich bedeutsam unterschiedliche Verteilungen der Typen zwischen verschiedenen Schulklassen ergeben, soll im weiteren Projektverlauf insbesondere unter Einbeziehung von Längsschnittdaten differenziert untersucht werden.

## 4.3 Relevanz für die Bildungsforschung und für die Schulpraxis

Im Projekt HEUREKO wird auf fundamentale und langfristig auszubildende mathematische Kompetenzen im Inhaltsbereich Wachstum und Veränderung fokussiert, welche mit Hilfe psychometrischer Modelle empirisch zugänglich gemacht werden. Das postulierte Kompetenzstrukturmodell und die gefundenen Kompetenzprofile können die Basis für ein Diagnoseinstrument mathematischer Problemlösefähigkeit beim Umgang mit Funktionen bilden. Diese kann sowohl zur Analyse von Entwicklungsverläufen in Längsschnittstudien dienen als auch in der Schulpraxis eingesetzt werden. Ziel des Diagnostikums ist es, Erkenntnisse zu Förderbedarf und Förderungsmöglichkeiten auf Lerngruppen- und Individuenebene zu gewinnen.

Zusätzlich werden im Projekt grundlegende, über den Gegenstandsbereich des Projektes hinaus anwendbare methodische Vorgehensweisen zur curricular validen Erfassung von Kompetenzstrukturen anhand von multidimensionalen Modellen für die Bildungsforschung entwickelt. Damit konnte in einem curricular zentralen Kompetenzbereich der Grundstein für eine differenzierte Kompetenzmessung gelegt werden.

## Literatur

- Ainsworth, S.E./Bibby, P.A./Wood, D.J. (2002): Examining the effects of different multiple representational systems in learning primary mathematics. In: *Journal of the Learning Sciences* 11, H. 1, S. 25–62.
- Adams, R.J./Wilson, M./Wang, W. (1997): The multidimensional random coefficient multinomial logit model. In: *Applied Psychological Measurement* 21, S. 1–13.
- Bayrhuber, M./Bruder, R./Leuders, T./Wirtz, M. (in Vorb.): Unidimensional or Multidimensional? Assessing and Modelling Mathematical Competence Structure.
- Bodemer, D./Ploetzner, R./Feuerlein, I./Spada, H. (2004): The active integration of information during learning with dynamic and interactive visualisations. In: *Learning and Instruction* 14, S. 325–341.
- Goldin, G.A. (1998): Representational systems, learning and problem solving in mathematics. In: *Journal of Mathematical Behavior* 17, H. 2, S. 137–165.
- Hartig, J. (2007): Skalierung und Definition von Kompetenzniveaus. In: Beck, B./Klieme, E. (Hrsg.): *Sprachliche Kompetenzen. Konzepte und Messung. DESI-Ergebnisse Band 1*. Weinheim: Beltz, S. 83–99.
- Heller, K.A./Perleth, Ch. (2000): Kognitiver Fähigkeitstest für 4. bis 12. Klassen, Revision (KFT 4–12+ R). Göttingen: Hogrefe.
- Jäger, A.O./Süß, H.-M./Beauducel, A. (1997): *Berliner Intelligenzstrukturtest Form 4 (BIS-T4)*. Göttingen: Hogrefe.
- Kleine, M. (2005): Latent-Class-Analyse: Ein Bindeglied zwischen Empirie und Theorie zur quantitativen Erfassung mathematischer Leistungen. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 26, H. 2, S. 97–113.
- Kozma, R.B./Russell, J. (1997): Multimedia and understanding: Expert and novice responses to different representations of chemical phenomena. In: *Journal of Research in Science Teaching* 34, S. 593–619.
- Malle, G. (2000): Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. In: *Mathematik lehren*, H. 103, S. 4–7.
- Pesonen M./Ehmke T./Haapasalo L. (2005): Solving mathematical problems with dynamical sketches: a study on binary operations. In: *Problem Solving in Mathematics Education. Proceedings of the Promath Meeting June 30–July 2, in Lahti*, S. 127–140.
- Rost, J. (2004): *Lehrbuch Testtheorie/Testkonstruktion*. Bern: Hans Huber.
- Schnotz, W. (2005): An integrated model of text and picture comprehension. In: Mayer, R.E. (Hrsg.): *The Cambridge handbook of multimedia learning*. Cambridge: Cambridge University Press, S. 49–69.
- Seufert, T. (2003): Supporting coherence formation in learning from multiple representations. In: *Learning and Instruction* 13, S. 227–237.
- Snow, R.E./Yalow, E. (1982): Education and intelligence. In: Sternberg, R.J. (Hrsg.): *A handbook of human intelligence*. Cambridge: Cambridge University Press, S. 493–586.
- Swan, M. (1985): *The Language of Functions and Graphs*. Nottingham: Shell Centre for Mathematical Education.
- Vermunt, J.K. (2004): Multilevel latent class models. In: *Sociological Methodology* 33, S. 213–239.
- Vermunt, J.K. (2008): Latent class and finite mixture models for multilevel data sets. In: *Methods in Medical Research* 17, H. 1, S. 33–51.
- Wu, M.L./Adams, R.J./Wilson, M. (2001): *ACER ConQuest version 2.0: generalised item response modelling software*. ACER Press.

**Anschrift der Autor/innen**

Dr. Marianne Bayrhuber, Pädagogische Hochschule Freiburg,  
Kunzenweg 21, D-79117 Freiburg  
E-Mail: bayrhuber@ph-freiburg.de

Prof. Dr. Timo Leuders, Pädagogische Hochschule Freiburg, Kunzenweg 21,  
D-79117 Freiburg  
E-Mail: leuders@ph-freiburg.de

Prof. Dr. habil. Regina Bruder, Technische Universität Darmstadt, Schlossgartenstraße 7,  
D-64289 Darmstadt  
E-Mail: bruder@mathematik.tu-darmstadt.de

Prof. Dr. Markus Wirtz, Pädagogische Hochschule Freiburg, Kunzenweg 21,  
D-79117 Freiburg  
E-Mail: markus.wirtz@ph-freiburg.de